Uso de cálculo de variaciones

Ecuaciones diferenciales parciales. Conceptos en cálculo de variaciones. Caso de optimización. Cálculo de variaciones y el método de elementos finitos.

Ecuaciones diferenciales parciales

Definición

Dada la función *u=u(x,y,z)*, *una ecuación diferencial en derivadas parciales se expresa en una forma en que se relacionan las derivadas parciales con las variables independientes*. Así:

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dots\right)=0$$

El orden de la función lo da el mayor grado en que aparece la derivación parcial.

Tipos de ecuaciones

Considérese la siguiente ecuación de segundo orden, de dos variables independientes, que además es homogénea y con coeficientes constantes.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2f\frac{\partial u}{\partial x}+2g\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0$$

Según los valores de *a, b, h,* las ecuaciones pueden ser:

Tipo de ecuación	Condición	Casos
Elíptica	$ab-h^2>0$	Ecuación de Laplace. Problemas de estática en elasticidad.
Parabólica	$ab-h^2=0$	Ecuación de difusión. Problemas dependientes del tiempo.
Hiperbólica	$ab-h^2<0$	Ecuación de onda. Problemas de propagación de ondas.

Un caso particular es la ***ecuación de Euler***, que se expresa en la forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Conceptos en cálculo de variaciones

Referencia

Melchor Rodríguez Caballero (UNAM, México). *Elasticidad*. División del Doctorado, UNAM. México, 1964

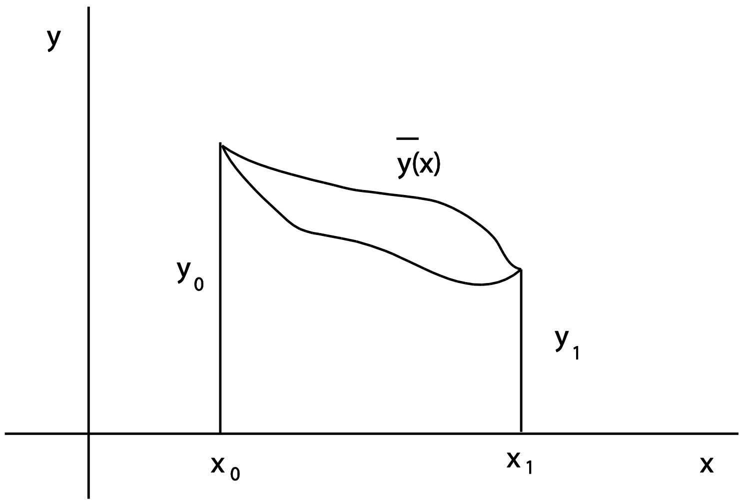
El cálculo de variaciones trata con problemas de valores extremos de funciones de integrales, que a su vez contienen varias funciones como argumentos. A estas funciones se les conoce como ***funcionales***. Entre las más conocidas está el ***funcional simple*** o de ***primer orden***.

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

La función *F(x,y,y')* es una función real conocida cuyos argumentos *x, y, y'=dy/dx*, son también reales. El resultado de *I(y)* depende de la elección de *y=y(x)*.

- **Concepto de variación**

Considérese el problema de determinar *y(x)* tal que *I(y)* tenga un mínimo. Para un valor determinado $\bar{y}(x)$, la integral tiene el valor $I(\bar{y})$.



Considérese la función *y(x)* que hace mínima a la integral *I(y)*. Y otra función arbitraria $\bar{y}(x)$, entre las cuales existe una diferencia mínima (que se llama *variación débil*), y en el intervalo x_0 y x_1, se cumple:

$$\bar{y}(x) - y(x) = \epsilon\eta(x)$$

Donde ϵ es un parámetro real, y *η(x)* completa la diferencia entre los puntos de las curvas entre los dos puntos del intervalo. La diferencia

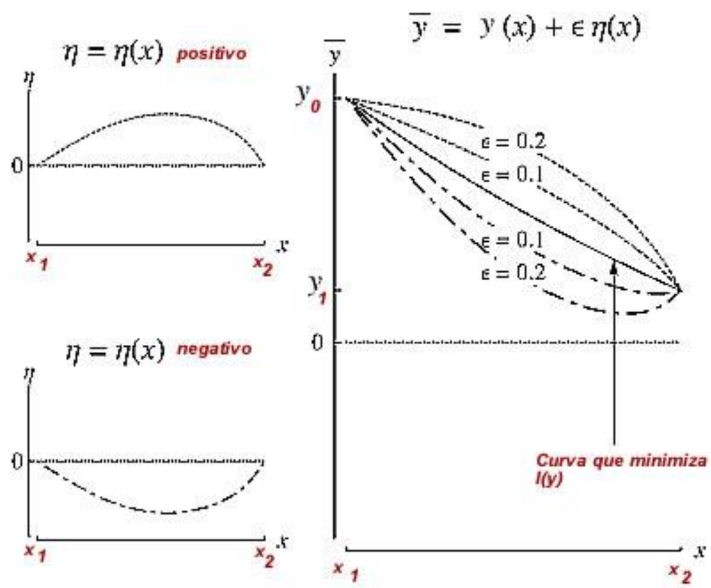
$$\delta y = \epsilon\eta(x) = \bar{y}(x) - y(x)$$

Es denominada la *variación δy de la función y(x)*. Dado que todas las curvas deben pasar por los puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1), se cumple:

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

Además, como *y(x)* hace mínimo a la integral *I(y)*, también se cumple:

$$I(\bar{y}) = I(y + \epsilon\eta) \geq I(y)$$



EJEMPLO DE VARIACIONES

Para que *y(x)* sea la función que haga mínima a la integral, es *condición necesaria*, que:

$$\left[\frac{dI(y+\epsilon\eta)}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = 0$$

- **Ecuación de Euler para funcionales simples**

Se considera el funcional sólo hasta la primera derivada:

$$F = F(x, y, y^{'})$$

Al cambiar *y(x)* por la familia *y(x)+ϵη(x)*, el incremento de la función será:

$$\Delta F = F(x, y+\epsilon\eta, y^{'} + \epsilon\eta^{'}) - F(x, y, y^{'})$$

Al desarrollar en serie de potencias de ϵ, despreciando las potencias superiores de este parámetro, la *variación de F* puede escribirse como:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

Al llevar la *variación de F* a la *variación de I*, es posible llegar a la ***ecuación de Euler***:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad o\ bien \qquad F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$$

Donde los subíndices sustituyen a las derivadas parciales. Al desarrollarse, por derivación en cadena

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}y^{'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y"$$

Se tiene:

$$F_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2} + F_{y'y}\frac{dy}{dx} + F_{y'x} - F_y = 0$$

Esta expresión es también conocida como ***ecuación Euler-Lagrange***. Es una ecuación diferencial de segundo orden, y en general tendrá dos familias de soluciones, una de las cuales corresponde a un ***extremo de I***.

Es posible una generalización de las ecuaciones de Euler para funcionales de mayor orden (con derivadas de mayor orden como argumentos), así como para funcionales de varios argumentos (de otras variables además de *x*).

♦ Métodos variacionales

Se dispone de métodos para obtener soluciones aproximadas a las ecuaciones de Euler. Las diferencias entre ellos no son esenciales. El método de Ritz y el método de Garlekin son los más conocidos.

Método de Ritz

Para aproximar una solución *y(x)* que minimice a la integral

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y^{'})dx$$

Tal que se cumpla las condiciones de frontera

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad y(x_1) = y_1$$

El método de Ritz requiere la formación de un polinomio para $\ddot{y}_k(x)$ de la forma:

$$\bar{y}_k(x) = \varphi_k(x, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k)$$

Puede tratarse de un polinomio algebraico, trigonométrico, u otro, en el cual los coeficientes se determinan del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{a}_r} = 0$$

Si la secuencia de funciones $\bar{y}_k(x)$ es convergente, es posible establecer las condiciones para las cuales se cumpla:

$$\lim_{n \to \infty}(\bar{y}_n) = I_{min}$$

Esto es, es posible aproximar un valor de I_{min}, con tal de elegir en la función $\bar{y}_k(x)$ un número suficiente de coeficientes $\bar{a}_i$. Una solución similar puede plantearse para el caso bidimensional.

Método de Garlekin

Se trata de una aproximación más amplia que en el caso anterior. Se trata de la obtención de una solución aproximada

$$u_n(x, y) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x, y)$$

De la ecuación diferencial

$$L(u) = 0$$

Se busca que la aproximación sea en el sentido de los mínimos cuadrados, en la forma:

$$min \iint_R [L(u_n) - L(u)]^2 dxdy$$

Esto significa que los coeficientes a_j deben determinarse de tal manera que se obtenga el mínimo señalado. Al reemplazar los valores de $u_n(x,y)$ y la condición para $L(u)$, y derivando el resultado respecto a a_j, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\iint L\,(\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j)\varphi_i\,dxdy = 0 \qquad i,j = 1,2,\dots,n$$

De donde se determinan los coeficientes a_j.

Caso de optimización

Los de optimización, constituyen casos comunes para la aplicación del cálculo de variaciones. Aquí se presenta el planteamiento de uno de ellos.

Referencia

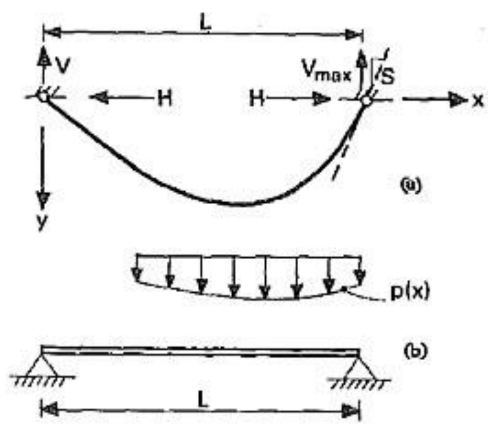
C. M. Wang (National University of Singapore, Singapore). *Optimal Shape of Cables*. Journal of Engineering Mechanics. Vol 110, N° 11. November, 1984. ASCE.

El estudio tiene como propósito presentar un método para obtener la forma de un cable, cuyo volumen (o peso) debe ser un mínimo.

- **Condición de óptimo**

Para una carga *p(x)*, la forma del cable responde a:

$$y = \frac{M}{H}$$



CABLE Y VIGA EQUIVALENTE

Donde *y* es el desplazamiento del eje del cable, *M* es el momento de flexión *equivalente* a una viga simplemente apoyada sometida a la misma carga y con la misma luz *L*. *H* es el componente de la reacción horizontal en el apoyo.

Así, la longitud específica del cable por unidad de longitud horizontal es:

$$\left[1 + \left(\frac{M'}{H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Donde *M'* corresponde a la diferenciación con respecto a la coordenada horizontal *x*.

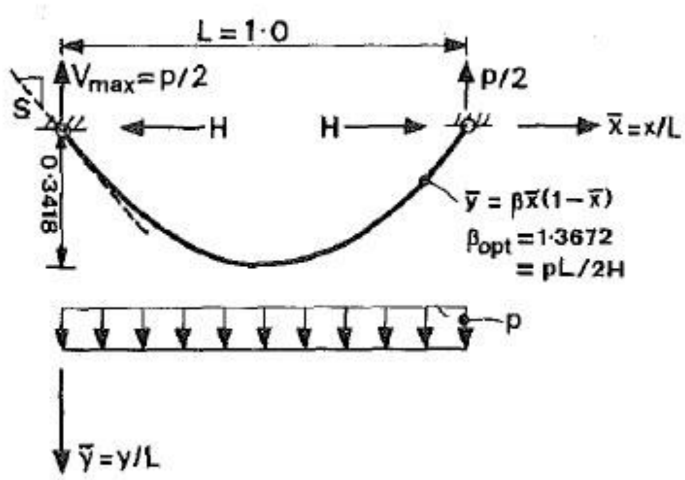
El área *A* de la sección transversal del cable debe ser capaz de soportar la máxima fuerza axial en el cable. Esta fuerza está localizada en el apoyo con el mayor componente vertical de la reacción. Esta área resulta:

$$A = \frac{H(1+S^2)^{1/2}}{\sigma_0}$$

En donde $S=V_{max}/H$ es la máxima pendiente del cable. V_{max} es el mayor componente vertical de la reacción en el apoyo, y σ_0 es el esfuerzo de fluencia del cable.

El volumen total del cable, Φ, resulta:

$$\Phi\sigma_0 = \int_0^L H(1+S^2)^{1/2}\left[1+\left(\frac{M'}{H}\right)^2\right]^{1/2} dx$$



FORMA ÓPTIMA DEL CABLE CON CARGA
UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

El artículo desarrolla una solución analítica para la obtención del volumen mínimo, asumiendo algunas simplificaciones.

Cálculo de variaciones y el método de elementos finitos

Referencia

Claes Johnson (Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Publications, Inc. New York. 2009.

Muchos de los problemas en ciencias e ingeniería han sido planteados con el uso de ecuaciones diferenciales o integrales. Anteriormente, las pretensiones de una solución analítica cerrada resultaban complejas (y en muchos casos, sólo posibles después de simplificaciones significativas). Felizmente las soluciones aproximadas, que demandan un trabajo numérico y son de tedioso trabajo manual, pueden ahora ser abordadas con el empleo de las computadoras. También es el caso del método de elementos finitos.

El método de elementos finitos fue introducido por ingenieros entre los finales del 50 y los comienzos del 60 del siglo pasado, como una solución numérica de ecuaciones diferenciales, especialmente en el campo del análisis de estructuras. Su aplicación a diversas estructuras, como vigas, columnas, marcos, placas y otras, requería del fraccionamiento de las mismas en partes menores, llamadas precisamente elementos finitos, y cuyo comportamiento estructural era simple y conocido. La compatibilidad en el desplazamiento de los nudos comunes, completa la integración de los elementos.

A mediados de los 60 comenzó el estudio matemático del método de elementos finitos, llegando a ser claro que el método correspondía a una técnica general para soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, con raíces en el cálculo de variaciones de antigua data. En los 60 y 70, el método fue desarrollado como uno general para soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones integrales, con aplicaciones en muchos campos de las ciencias e ingenierías.

Como todo método numérico, se trata de convertir el problema de ecuaciones diferenciales en un problema discreto, expresado en un sistema de ecuaciones con un número finito de incógnitas que se resuelven con el uso de un computador.

El proceso que se usa en el método de elementos finitos comienza por reformular las ecuaciones diferenciales como un problema equivalente del cálculo de variaciones. Se expresa en la ***forma***

$$Encontrar \;\; u_h \in V_h \;\; tal\ que\ F(u_h) \leq F(v) \;\; para\ todo \;\; v \in V_h \qquad (M_h)$$

Donde V_h es un conjunto de funciones simples que dependen solamente de un número finito de parámetros. Las funciones v en V_h representan cantidades variando continuamente, como el caso de desplazamientos en un cuerpo elástico, o la temperatura. $F(v)$ es la energía total asociada con v. La *forma* corresponde a la caracterización de la solución de la ecuación diferencial como una función en V_h que minimiza la energía total del sistema.

La característica especial del método de elementos finitos, por el cual se le asimila al ***método Ritz-Galerkin*** está en el hecho de que las funciones en V_h son elegidas como polinomios.

En resumen, para resolver aproximadamente una ecuación diferencial o integral usando el método de elementos finitos, se siguen los siguientes pasos.

- Formulación del problema como uno de cálculo de variaciones.
- Discretización del método de elementos finitos: construcción del espacio dimensional finito V_h.
- Solución del problema discreto.
- Desarrollo del método en un computador.

♦ Modelos unidimensionales

Modelo general

Diferentes modelos representativos de situaciones de interés en mecánica continua, obedecen a la siguiente representación en *una ecuación diferencial*.

$$-u''(x) = f(x) \qquad para \;\; 0 < x < 1$$

$$y\ las\ condiciones\ de\ frontera \qquad u(0) = u(1) = 0 \qquad (D)$$

Donde $v' = dv/dx$ y $f(x)$ es una función continua conocida.

Como se indicó, el inicio para emplear el método de elementos finitos corresponde a la reformulación de la ecuación diferencial y las condiciones de frontera *(D)* en la *forma* (M_h). En este caso

$$F(v) representa\ la\ energía\ potencial\ total\ al\ producirse\ una\ variación\ v$$

Esto es:

$$F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - (f, v)$$

Donde $\frac{1}{2}(v',v')$ representa la energía elástica interna, y (f,v) la energía externa potencial debida a la carga. Entonces, el problema *(M)* corresponde al *Principio de energía potencial mínima* en mecánica; esto es

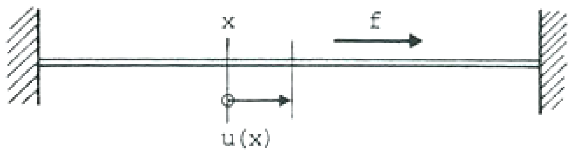
$$Encontrar\ \ u \in V\ tal\ que\ F(u) \le F(v)\ con\ \ v \in V \qquad\qquad (M)$$

El problema de cálculo de variaciones *(V)* corresponde al ***Principio de trabajo virtual***, expresado en la forma:

$$Encontrar\ u \in V\ tal\ que\ (u', v') = (f, v)\ \ \ con\ v \in V \qquad\qquad (V)$$

De esta manera, la solución de *(M)* y *(V)* es también la solución de *D)*.

Caso de una barra elástica



BARRA ELÁSTICA CON FUERZA TANGENCIAL

El problema general *(D)* es representativo, por ejemplo, al caso de la barra empotrada en sus extremos, sometida a una carga tangencial *f(x)*. Se designa con *σ(x)* y *u(x)* la tracción y el desplazamiento en *x*, respectivamente, bajo la carga *f(x)*. Para un comportamiento elástico lineal y pequeñas deformaciones, en el intervalo *(0,1)*, se cumple:

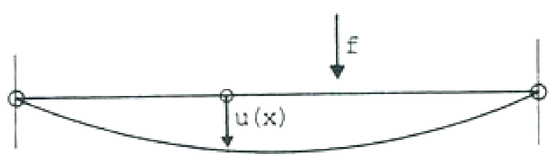
$$\sigma = Eu' \qquad\qquad Ley\ de\ Hooke$$

$$-\sigma' = f \qquad\qquad Ecuación\ de\ equilibrio$$

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad\qquad Condiciones\ de\ frontera$$

Para un módulo de elasticidad *E=1*, y reemplazando la Ley de Hooke en la Ecuación de equilibrio, se obtienen las mismas expresiones del modelo general *(D)*.

Caso de una cuerda elástica



CUERDA ELÁSTICA EN TENSIÓN

Igual resultado puede obtenerse en el caso de una cuerda elástica con tensión 1, fija en ambos extremos, y sometida a la carga *f*. Asumiendo pequeños desplazamientos, se puede comprobar que el desplazamiento transversal *u* satisface las ecuaciones *(D)*.

Caso de conducción de calor

Esta vez, *u* es la temperatura. Sea *q* el flujo de calor en una varilla conductora de calor, sometida a una fuente de calor de intensidad *f*. Asumiendo que la temperatura es cero en los puntos extremos, se cumple que:

$$-q = ku' \qquad\qquad Ley\ de\ Fourier$$

$$q' = f \qquad\qquad Conservación\ de\ energía$$

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad \textit{Condiciones de frontera}$$

En este caso, *k* es la conductividad térmica, y al hacer *k=1*, se obtiene ***(D)***.