

Del pospandeo a la catástrofe

Referencia. Resortes lineales. Motivación. Análisis del pospandeo inicial. Análisis de los resultados paradójicos. Tratamiento analítico.

Referencia

El Naschie, M. S. (1990). "Stress Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach" McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.

Resortes lineales

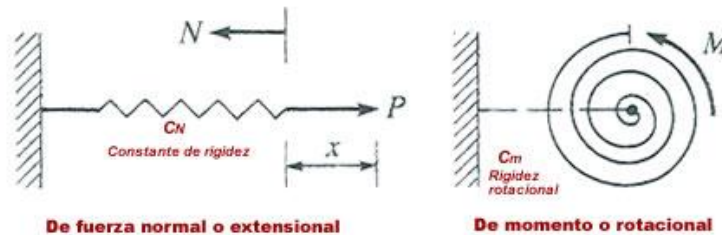


Figura 1. TIPOS DE RESORTES LINEALES

Estos resortes constituyen herramientas útiles para modelar sistemas estructurales compuestos por sus equivalentes elementos *discretos* (esto es, diferenciados, distintos, finitos). Se consideran de dos tipos según se ilustran en la Figura 1: de carga normal y de momento.

De carga normal

Identifican variaciones longitudinales. Su relación con la carga o fuerza requiere de las siguientes constantes:

C_N : constante de rigidez del resorte.

$K=1/C_N$: flexibilidad del resorte.

La relación lineal que gobierna su comportamiento es: $P=C_N\delta$. O bien $\delta=KP$. En ambos casos, son expresiones independientes de la longitud L del resorte.

De otro lado, la energía interna debida a la deformación elástica almacenada en el resorte, se expresa como $-W_{ij}=\frac{1}{2}C_Nx^2$.

De momento, torsión o rotacionales

Se asocian a variaciones rotacionales ψ en la forma: $M=C_m\psi=\psi/K_m$. Aquí, C_m es la rigidez rotacional, y K_m la flexibilidad rotacional.

El trabajo propio de las fuerzas internas se expresa como: $U=\frac{1}{2}C_m\psi^2$.

Motivación

Según el autor, la discrepancia persistente entre los resultados teóricos y experimentales para cargas de pandeo en cascarones elásticos delgados, motiva la presentación de la teoría de pospandeo. La magnitud de la carga crítica experimental llega a ser sólo un tercio o menos del valor teórico.

La discusión comenzó diferenciando el comportamiento pospandeo al corte entre una placa y un cascarón (cilíndrico o esférico). En los experimentos, el comportamiento pospandeo al corte de las placas es fuertemente estable, mientras que en los cascarones es sólo una fracción de la carga teórica. La explicación es presentada a través del comportamiento no lineal del pospandeo, el mismo que está conectado con las imperfecciones de la estructura.

Análisis del pospandeo inicial

Considérese los tres modelos de la Figura 2, cuya única diferencia está en los resortes.

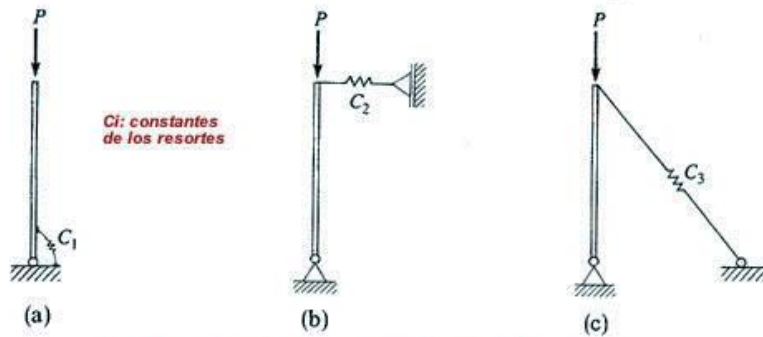


Figura 2. MODELOS DE ANÁLISIS CON DIFERENTES RESORTES

La carga crítica de cada una de las tres estructuras puede ser calculada, por ejemplo, por el equilibrio de momentos $\sum M = 0$ en la articulación de soporte, según se indica en la Figura 3.

Supóngase que las constantes de los resortes son tales que en los cálculos las cargas críticas llegan a ser iguales. Esto es.

$$C_1/L = C_2L = C_3L\cos^2\alpha$$

Sin embargo, los resultados experimentales contradicen esta relación pues siempre indican lo siguiente.

$$P_1^c > P_2^c > P_3^c$$

Además, los resultados P_2^c y P_3^c tienen mayor dispersión al repetirse los experimentos, mayores en dispersión que en el caso de P_1^c .

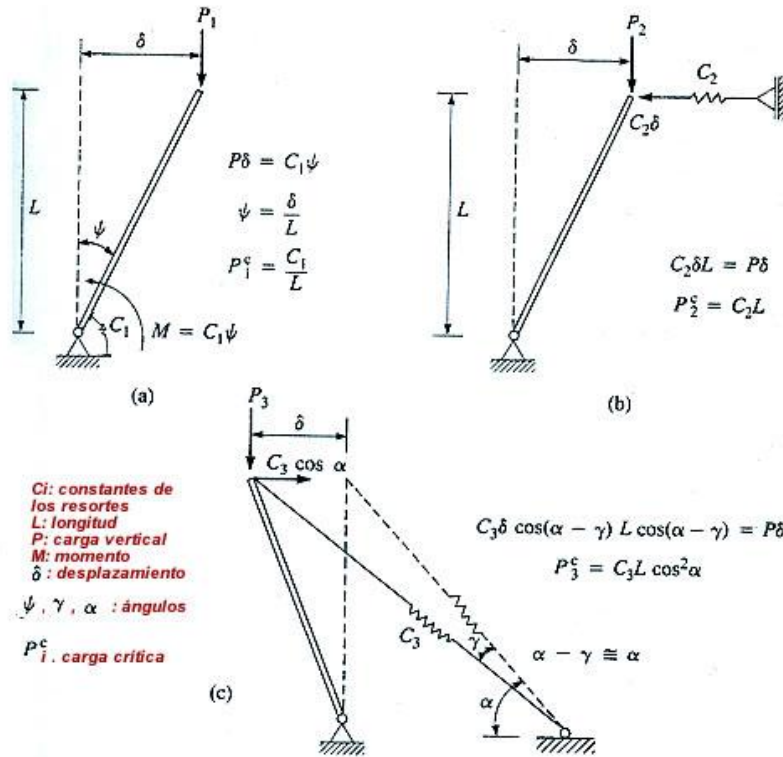


Figura 3. RELACIONES DE EQUILIBRIO DE MOMENTO Y CARGAS CRÍTICAS

Análisis de los resultados paradójicos

La explicación de la paradoja descansa, no en el análisis lineal, sino en el comportamiento pospandeo. Este comportamiento es distinto en cada modelo.

Es por ello que el ajuste hecho a las constantes de los resortes no altera esta diferencia. En relación con el análisis, la inclusión de términos no lineales permitiría reflejar este comportamiento pospandeo. De hecho, las representaciones analíticas para el pospandeo, y de ahí para la catástrofe y el caos, utilizan modelos no lineales.

La Figura 4 muestra en una gráfica carga - deflexión ($P - \delta$) la bifurcación pospandeo para los tres modelos. En trazo continuo en el caso de que la estructura sea perfecta, y en trazo discontinuo, como asíntota, para el caso de imperfecciones. De hecho, las imperfecciones se presentan siempre y pueden ser debidas a excentricidades o falta de homogeneidad en el material.

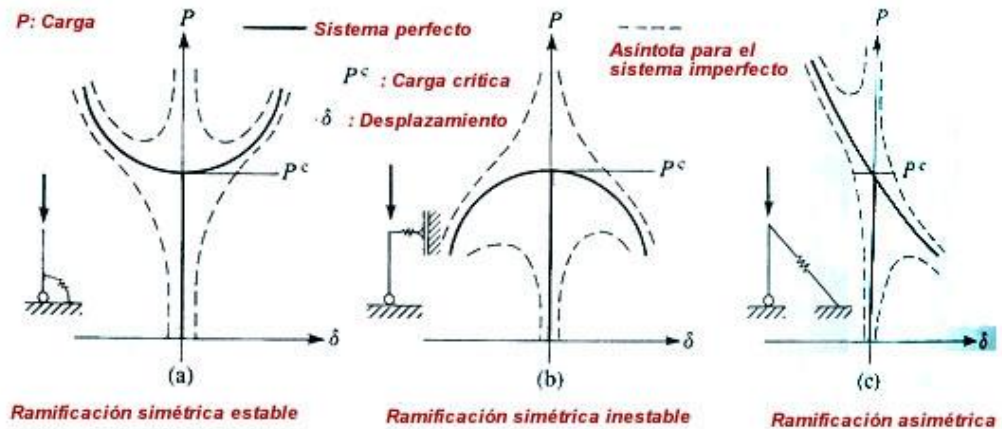


Figura 4. BIFURCACIÓN $P - \delta$ POSPANDEO EN LOS TRES MODELOS

Figura 4. Ramificación en modelos perfectos:

Simétrica estable. Para cargas encima del valor crítico, la deflexión aumenta sólo si se incrementa la carga.

Simétrica inestable. La deflexión se incrementa al infinito si el sistema es perturbado encima del valor crítico.

Asimétrica. El sistema es inestable para deflexiones en el lado derecho, y estable en el izquierdo. Como quiera que pueda estar en cualquiera de los dos lados, se califica al sistema como inestable.

Ramificación en modelos imperfecto.

El comportamiento errático debido a las imperfecciones se gráfica en términos asintóticos o de umbrales para los tres modelos.

El autor llama la atención a que pequeñas variaciones por encima de la carga crítica pueden dar lugar a variaciones importantes de deflexión. Hace el símil con la curva en una carretera. Si el ángulo de diseño es apropiado, el manejo en la curva es fácilmente controlable. En caso contrario, pequeños desajustes en el manejo del timón, puede conducir a situaciones desastrosas.

El hecho de la dispersión en los valores de las cargas críticas es explicado por el autor con dos razones. La primera, es que al repetir el espécimen para la experimentación, cada vez se tiene imperfecciones diferentes, y de ahí cargas distintas. La segunda, es la dificultad en precisar el momento para calificar la carga de crítica, especialmente en el caso de ramificaciones inestables.

Tratamiento analítico

El autor deriva las relaciones pospandeo de carga - deflexión utilizando el método de la energía, obteniendo los siguientes resultados.

Para el primer modelo

La carga pospandeo resulta de la siguiente manera.

$$P = \frac{C_1}{L} \frac{\psi}{\text{sen}\psi}$$

Obsérvese que la primera parte corresponde a la carga crítica. La linealidad se obtiene al asumir un ángulo muy pequeño, y de ahí aproximar el valor del seno al del ángulo.

Para el segundo modelo

En este caso resulta.

$$P = C_2L - \frac{1}{2}C_2L\psi^2$$

Igualmente, si el ángulo se considera muy pequeño, su cuadrado se desprecia obteniéndose la expresión lineal de la carga crítica.

Para el tercer modelo

Se tiene de manera similar.

$$P = P^c - \frac{3}{8}C_3L\psi$$